Дәріс 9

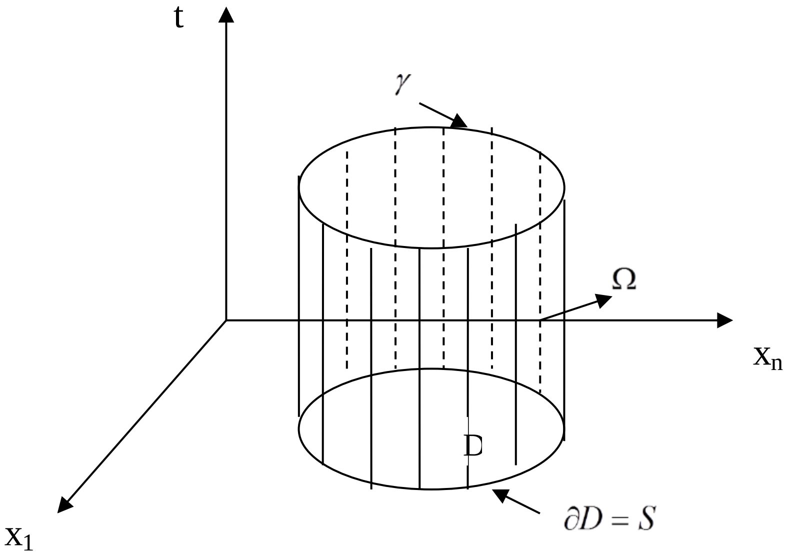
Жылу өткізгіштік теңдеуі үшін бірінші шекаралық есеп. Есептің қойылуы. Фурье әдісімен бірінші шекаралық есептерді шешу

1. Жылуөткізгіштік теңдеуіне қойылатын бастапқы– бірінші шекаралық есеп. Максимум белгісі. Шешімнің жалғыздығы және орнықтылығы.

$D - R^n$ кеңістігінде жататын шенелген бір байланысты $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n), n \geq 1$ нүктелер жиыны болсын. Q_T –деп $R^{n+1}_{\bar{x},t}$ кеңістігінде жататын D облысымен $(0,T)$ интервалының бірігуінен шыққан цилиндрді белгілейік (33-сурет), яғни

$$Q_T = \left\{ (\bar{x}, t) \in R^{n+1}_{\bar{x},t} : \bar{x} \in D \subset R^n,\ t \in (0,T) \right\}.$$

Ω-деп Q_T цилиндрінің бүйір бетін, ∂Q-деп Q_T цилиндрінің шекарасын, $\Gamma = \partial Q \setminus \gamma$ - деп Q_T цилиндрінің параболалық шекарасын (γ- цилиндрдің жоғарғы табаны) белгілейік және $\partial D = S$ болсын.



33-сурет

Q_T цилиндрінде берілген

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} \tag{8.2.1}$$

жылуөткізгіштік теңдеуін қарастырайық.

Бастапқы – бірінші шекаралық есептің қойылуы: (8.2.1) теңдеуінің

$$U(\bar{x}, t)\big|_{t=0} = \varphi(\bar{x}),\ \ \bar{x} \in \overline{D} = D \cup S \tag{8.2.2}$$

бастапқы шартын

$$U(\bar{x}, t)\big|_{\overline{\Omega}} = \mu(\bar{x}, t), \quad (\bar{x}, t) \in \overline{\Omega} = (\ \bar{x} \in S,\ t \in [0,T]) \tag{8.2.3}$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын $C^{2,1}(Q_T \cup \gamma) \cap C(\overline{Q}_T)$ класына жататын классикалық шешімін табу керек. Мұндағы $\varphi(\bar{x}) \in C(\overline{D})$, $\mu(\bar{x},t) \in C(\overline{\Omega})$ және $\varphi(\bar{x}) = \mu(\bar{x},0)$ – көрсетілген кеңістіктерде жататын белгілі функциялар.

(8.2.1)-(8.2.3) есебі физикалық тұрғыдан D денесіндегі әрбір нүктедегі $U(\bar{x},t)$ температурасын, оның $\varphi(\bar{x})$ бастапқы температурасы мен $t \in [0,T]$ уақыт моментіндегі D денесінің S шекарасындағы температурасы, яғни Q_T цилиндрінің Ω бүйір бетіндегі температурасы арқылы анықтау. Бұл есепті шешу кезінде оның шешімін $t > 0$ болған кезде іздестіру өте маңызды. Өйткені жалпы жағдайда $t < 0$ болған кезде бұл есептің шешімі болмайды. Жылуөткізгіштік теңдеуінің толқын теңдеуінен бір өзгешелігі t айнымалысын $-t$-ға өзгерткен кезде қатты өзгереді. Бұл жылуөткізгіштік теңдеуі арқылы жазылатын процестердің қайтымды еместігімен байланысты.

Максимум белгісі. Егер $C^{2,1}(O_T \cup \gamma) \cap C(\overline{Q}_T)$ класында жататын $U(\bar{x},t)$ функциясы (8.2.1) теңдеуін қанағаттандыратын және ол тұрақтыға тең болмайтын болса, онда ол $Q_T \cup \gamma$ жиынында өзінің $\overline{Q}_T$ жиынындағы ең үлкен және ең кіші мәніне ие бола алмайды, яғни ол өзінің $\overline{Q}_T$ жиынындағы ең үлкен және ең кіші мәніне $\Gamma = \overline{\Omega} \cup D$ шекарасында ие болады.

Дәлелдеуі. $m = \max\limits_{\Gamma} U(\bar{x},t)$, ал $M = \max\limits_{\overline{Q}_T} U(\bar{x},t)$ болсын. Қарсы жориық, яғни $U(\bar{x},t)$ функциясы өзінің $\overline{Q}_T$ жиынындағы ең үлкен мәнін шекарасында емес, $\overline{Q}_T$ цилиндірінің қандай да бір нүктесінде қабылдайтын болсын $(M > m)$. Бұл жағдайда

$$\left(\exists(\bar{x}_0,t_0) = N_0 \in Q_T \cup \gamma\right) : U(N_0) = \max_{(\bar{x},t)\in\overline{Q}_T} U(\bar{x},t) = M .$$

D облысының диаметрін d, ал $\bar{x} = (x_1,..., x_i,...x_n)$ нүктесі мен $\bar{x}_0 = \left(x_1^{(0)},..., x_i^{(0)},...x_n^{(0)}\right)$ нүктелерінің ара қашықтығын τ деп белгілейік. $\overline{Q}_T$ цилиндрінде жатқан кез келген $(\bar{x},t)$ нүктелері үшін әр уақытта $\tau < d$ болады.

$$\vartheta(\bar{x},t) = U(\bar{x},t) + \frac{M-m}{2d^2}\tau^2$$

жаңа функциясын қарастырайық. Γ-параболалық шекарасында:

$$\left|\upsilon(\bar{x},t)\right|_{\Gamma} = \left(U(\bar{x},t) + \frac{M-m}{2d^2}\tau^2\right)\Bigg|_{\Gamma} \le U(\bar{x},t)\big|_{\Gamma} + \frac{M-m}{2} \le m + \frac{M-m}{2} = \frac{m+M}{2} < \frac{M+M}{2} = M$$

және $N_0 = (\bar{x}_0,t_0) \in Q_T \cup \gamma$ нүктесінде $\vartheta(N_0) = U(N_0)$ болады, өйткені $\tau = 0$. Сондықтан, $\vartheta(x,t)$ функциясы да $U(\bar{x},t)$ функциясы сияқты өзінің $\overline{Q}_T$ жиынындағы ең үлкен мәнін $Q_T \cup \gamma$ жиынында жататын қандай бір $N_1 = (\bar{x}_1,t_1)$ нүктесінде қабылдайтын болады, яғни

$$\vartheta(N_1) = \max_{(\bar{x},t)\in\overline{Q}_T} \vartheta(\bar{x},t) \ge \vartheta(N_0) = U(N_0) = M .$$

Онда максимумның қажетті шарты бойынша N_1 нүктесінде

$\vartheta_{x_i}(N_1)=0,\ \vartheta_t(N_1)\ge 0,\ \vartheta_{x_i x_i}(N_1)\le 0$ орындалатын болады. Сондықтан

$$\vartheta_t(N_1)-a^2\sum_{i=1}^{n}\vartheta_{x_i x_i}(N_1)\ge 0$$

(8.2.4)

Екінші жағынан, $Q_T\cup\gamma$ жатқан кез келген $(\bar{x},t)$ нүктелері үшін

$$\vartheta_t(\bar{x},t)-a^2\sum_{i=1}^{n}\vartheta_{x_i x_i}(\bar{x},t)=U_t(\bar{x},t)-a^2\sum_{i=1}^{n}U_{x_i x_i}(\bar{x},t)-\frac{M-m}{2d^2}\sum_{i=1}^{n}a^2\Delta\tau^2=-\frac{M-m}{2d^2}a^2\cdot n<0$$

Бұл теңсіздік (8.2.4) теңсіздігіне қайшы. Алынған қайшылық максимум белгісінің тұжырымының дұрыстығын дәлелдейді.

1-салдар. Егер $\tilde{N}^{2,1}(Q_T\cup\gamma)\cap C(\overline{Q}_T)$ класында жататын $U(\bar{x},t)$ функциясы (8.2.1) теңдеуін қанағаттандыратын және ол $Q_T\cup\gamma$ жиынында өзінің $\overline{Q}_T$ жиынындағы ең үлкен (ең кіші) мәнін қабылдайтын болса, онда $U(\bar{x},t)$ функциясы $\overline{Q}_T$ жиынында тұрақты функция болады.

Дәлелдеуі. Қарсы жориық, яғни $U(\bar{x},t)$ функциясы $\overline{Q}_T$ жиынында тұрақты функция болмасын $(U(\bar{x},t)\ne const)$. Онда максимум белгісі бойынша ол өзінің ең үлкен (ең кіші) мәнін Г - параболалық шекарасында қабылдайтын болады. Бұл салдардың шартына қайшы. Алынған қайшылық салдардың тұжырымының дұрыстығын дәлелдейді.

Максимум белгісі мен 8.2.1- салдар тұжырымынан келесі әлсіз максимум белгісі шығады: егер $C^{2,1}(Q_T\cup\gamma)\cap C(\overline{Q}_T)$ класында жататын $U(\bar{x},t)$ функциясы (8.2.1) теңдеуін қанағаттандыратын болса, онда ол өзінің $\overline{Q}_T$ жиынындағы ең үлкен және ең кіші мәніне $\Gamma=\partial Q_T\setminus\gamma=\overline{\Omega}\cup D$ шекарасында ие болады.

2-салдар. Егер $C^{2,1}(Q_T\cup\gamma)\cap C(\overline{Q}_T)$ класында жататын $U(\bar{x},t)$ функциясы (8.2.1) теңдеуін қанағаттандыратын болса, онда $\overline{Q}_T$ жатқан кез келген $(\bar{x},t)$ нүктелері үшін:

а) $\min\limits_{\Gamma}U(\bar{x},t)\le U(\bar{x},t)\le\max\limits_{\Gamma}U(\bar{x},t)$; ә) $|U(\bar{x},t)|\le\max\limits_{\Gamma}|U(\bar{x},t)|$

орындалады.

3-салдар. $C^{2,1}(Q_T\cup\gamma)\cap C(\overline{Q}_T)$ класында жататын $U(\bar{x},t)$ функциясы (8.2.1) теңдеуін қанағаттандыратын болсын. Егер Γ шекарасында жатқан барлық нүктелері үшін $U(\bar{x},t)\ge 0(\le 0)$ орындалатын болса, онда $\overline{Q}_T$ жиынында жатқан барлық $(\bar{x},t)$ нүктелері үшін де $U(\bar{x},t)\ge 0(\le 0)$ орындалады.

1- теорема (шешімнің жалғыздығы). Егер (8.2.1)-(8.2.3) есебінің шешімі бар болса, онда ол жалғыз болады.

Дәлелдеуі: (8.2.1)-(8.2.3) есебінің бір-біріне тең емес екі $U_1(\bar{x},t)$ және $U_2(\bar{x},t)$ шешімдері бар деп ұйғарайық. Осы шешімдердің айырымын $w(\bar{x},t)$ деп белгілейік, яғни $w(\bar{x},t)=U_1(\bar{x},t)-U_2(\bar{x},t)$.

Әлбетте, бұл функция $C^{2,1}(Q_T\cup\gamma)\cap C(\overline{Q}_T)$ класында жатады, (8.2.1) теңдеуін қанағаттандырады және Г шекарасында жатқан барлық $(\bar{x},t)$ нүктелері үшін $w(\bar{x},t)\big|_{\Gamma}=U_1(\bar{x},t)\big|_{\Gamma}-U_2(\bar{x},t)\big|_{\Gamma}=0$ шартын қанағаттандыратын болады. Онда 8.2.3-салдар тұжырымы бойынша $\overline{Q}_r$ жиынында жатқан барлық $(\bar{x},t)$ нүктелері үшін $w(\bar{x},t)\equiv 0 \Leftrightarrow U_1(\bar{x},t)\equiv U_2(\bar{x},t)$ тепе-теңдігі орындалады.

2-теорема (шешімнің орнықтылығы). Егер (8.2.1)-(8.2.3) есебінің шешімі бар болса, онда ол орнықты болады, яғни ол берілген $\varphi(\bar{x})$ және $\mu(\bar{x},t)$ функцияларына байланысты үзіліссіз болады.

Дәлелдеуі: $U_1(\bar{x},t)$ деп

$$U_t = a^2\sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_i}$$
$$U(\bar{x},t)\big|_{t=0} = \varphi_1(\bar{x}), \quad \bar{x}\in\overline{D}\,,\ U(\bar{x},t)\big|_{\overline{\Omega}} = \mu_1(\bar{x},t),\ (\bar{x},t)\in\overline{\Omega}$$

есебінің классикалық шешімін, ал $U_2(\bar{x},t)$ деп

$$U_t = a^2\sum_{i=1}^{n} U_{x_i x_i}$$
$$U(\bar{x},t)\big|_{t=0} = \varphi_2(\bar{x}),\ \bar{x}\in\overline{D}\,,\ U(\bar{x},t)\big|_{\Omega} = \mu_2(\bar{x},t),\ (\bar{x},t)\in\overline{\Omega}$$

есебінің классикалық шешімін белгілейік.

Егер

$$\forall\bar{x}\in\overline{D}:\left|\varphi_1(\bar{x})-\varphi_2(\bar{x})\right|<\varepsilon\ ,\ \forall(\bar{x},t)\in\overline{\Omega}:\left|\mu_1(\bar{x},t)-\mu_2(\bar{x},t)\right|<\varepsilon \qquad (8.2.5)$$

орындалатын болса, онда 8.2.2-салдар тұжырымы бойынша $\overline{Q}_T$ жиынында жатқан барлық $(\bar{x},t)$ нүктелері үшін

$$\left|U_1(\bar{x},t)-U_2(\bar{x},t)\right|\le\max_{\Gamma}\left|U_1(\bar{x},t)-U_2(\bar{x},t)\right| = \max_{\Gamma}\left\{\max_{(\bar{x},\,t)\in\overline{\Omega}}\left|\mu_1(\bar{x},t)-\mu_2(\bar{x},t)\right|,\ \max_{\bar{x}\in\overline{\Omega}}\left|\varphi_1(\bar{x})-\varphi_2(\bar{x})\right|\ \right\}$$

Бұдан (8.2.5) теңсіздігін ескеріп, $\left|U_1(\bar{x},t)-U_2(\bar{x},t)\right|<\varepsilon$ теңсіздігін аламыз. Бұл (8.2.1)-(8.2.3) есебінің шешімінің орнықтылығын білдіреді.